УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ. ЧАСТЬ I

В.Н. Барашков

НИИ ПММ при Томском государственном университете
E-mail: ger@mail.tomsknet.ru

Представлена численная методика определения дву- и трехмерного упругопластического напряженно-деформированного состояния твердого деформируемого тела с помощью вариационно-разностного метода, реализующего вариационный принцип Лагранжа методом конечных разностей. Физические соотношения принимаются согласно теории малых упругопластических деформаций, а геометрические соотношения берутся в виде уравнений Коши. Физически нелинейная задача решается методом переменных параметров упругости. На примере задач о деформировании тела вращения оживальной формы и цилиндрического сектора проводится сравнение прямого и итерационного методов решения системы линейных алгебраических уравнений большого порядка, к которой приводит использование необходимого условия экстремума сеточного аналога функционала полной потенциальной энергии системы.

1. Введение

Математическое описание процесса деформирования упругого тела в самом общем случае представляется в виде вариационных принципов теории упругости. Эти принципы включают в себя некоторые основные теоремы в форме интегральных равенств, связывающих напряжения, деформации и перемещения во всем объеме деформируемого тела. Вариационные принципы представляют собой теоретическую основу современных численных методов, позволяющих находить эффек-

тивное решение задач в тех случаях, когда аналитическое интегрирование уравнений теории упругости не представляется возможным.

Для решения упругопластической задачи воспользуемся вариационным принципом Лагранжа

$$\delta Э = 0 \quad (1)$$

где $Э$ – квадратичный функционал полной потенциальной энергии системы "тело-нагрузка", который может быть записан для любой конструкции. Следствием этого является широкое использование принципа Лагранжа при решении прикладных задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ). В отличие от вариационных принципов Ху-Вашицу и Рейсснера, принцип Лагранжа является экстремальным, ибо для действительного напряженно-деформированного состояния функционал полной потенциальной энергии системы $Э$ достигает минимума по сравнению с другими возможными состояниями упругого тела. Возможна следующая формулировка вариационного принципа Лагранжа: "… из всех возможных напряженных состояний упругого тела, для которых выполнены граничные условия в перемещениях, а деформации и перемещения связаны геометрическими уравнениями теории упругости, истинным является то, при котором потенциальная энергия системы получает минимальное значение" [1].

Уравнения равновесия и статические граничные условия служат уравнениями Эйлера для функционала энергии $Э$. Поэтому при решении задачи теории упругости и пластичности в вариационной постановке (1) нет необходимости заранее удовлетворять граничным условиям в напряжениях, ибо они удовлетворяются автоматически при нахождении минимума функционала полной потенциальной энергии системы. Вариационный принцип Лагранжа является средством получения уравнений равновесия и граничных условий в том случае, когда традиционный способ их выведения не может быть применен [2].

Если при минимизации функционала $Э$ используются конечно-разностные представления, то получаемый метод носит название вариационно-разностного метода (ВРМ). ВРМ сводит проблему минимизации функционала энергии системы $Э$, являющейся квадратичной функцией относительно деформаций и перемещений, к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки.

После дискретизации функционала энергии $Э$ задача об отыскании минимума функционала сводится к отысканию минимума функции многих переменных E (сеточного аналога функционала). При этом возможны два способа: прямая минимизация и использование необходимого условия экстремума функции многих переменных, приводящего к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Прямые методы минимизации функции многих переменных позволяют находить экстремаль заданной функции непосредственно, минуя уравнения Эйлера. Использование преимуществ этого подхода возможно при наличии эффективных алгоритмов минимизации. Для прямой минимизации функции многих переменных применяются, в основном, три метода: локальных вариаций, сопряженных градиентов и наискорейшего спуска. К недостаткам этих методов следует отнести медленную сходимость для функций овражного типа, необходимость наличия хорошего нулевого приближения, возможность попадания в локальный минимум и большое время решения.

Методы реализации минимума функции, основанные на использовании принципа стационарности, связаны с получением и решением систем алгебраических уравнений высокого порядка, что оказывается в некоторых случаях менее выгодным. Эти методы можно разделить на итерационные и прямые. Главное отличие итерационных методов от прямых заключается в том, что первые дают решение системы уравнений лишь как предел последовательности итерационных приближений $\{f_k\}$ при $k \to \infty$. Прямые методы позволяют получать точное решение за конечное число вычислений (если нет ошибок округления). Алгоритм прямого метода в отличие от итерационного, который состоит из повторного применения простого алгоритма, сложен, и состоит из неповторяющихся частей. Метод исключения Гаусса решения СЛАУ является примером прямого метода.

Представленные ниже результаты получены с использованием необходимого условия экстремума полной потенциальной энергии системы. При этом для решения СЛАУ были опробованы оба метода и сделаны оценки их достоинств и недостатков применительно к дву- и трехмерным задачам теории упругости и пластичности.

Разработанные вариант ВРМ и численные методики позволяют решать статические и квазистатические упругопластические задачи в дву- и трехмерной постановках на неравномерных сетках для тел сложной формы и сложным законом распределения физико-механических характеристик (ФМХ) с целью определения их напряженно-деформированного состояния и анализа прочности, а также создания рационального по прочности проекта конструкции.

2. Вариационно-разностный метод решения задачи теории упругости и пластичности

Математическая формулировка задачи линейной теории упругости в декартовой системе координат записывается с помощью дифференциальных уравнений в частных производных:

– уравнения равновесия $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$;
– соотношения деформации-перемещения $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$;

– соотношения напряжения-деформации $\sigma_{ij}=a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$;
– или обратные им соотношения $\varepsilon_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl}$;
– граничные условия в напряжениях $\sigma_{ij}n_j=\overline{T}_i$ на S_σ;
– граничные условия в перемещениях $u_i=\overline{u}_j$ на S_u.

Здесь $\overline{F}_i$ – компоненты массовых сил, отнесенные к единичному объему; $\overline{T}_i$ – компоненты заданных внешних сил, отнесенные к единице площади поверхности; $\overline{u}_j$ – заданные компоненты перемещений (i = 1,2,3); a_{ijkl}, b_{ijkl} – компоненты тензоров четвертого ранга упругих постоянных; n_j – направляющие косинусы единичной внешней нормали к поверхности; S_σ – часть поверхности S тела, на которой заданы внешние нагрузки; S_u – часть поверхности S тела, на которой заданы перемещения; $S=S_\sigma+S_u$.

Имеем пятнадцать уравнений относительно пятнадцати неизвестных, а именно: шесть компонент тензора напряжений σ_{ij}, шесть компонент тензора деформаций ε_{ij}, три компоненты тензора перемещений u_i.

Но существует другой путь решения данной задачи – вариационный. Для этого исходная задача теории упругости записывается в интегральной форме, связанной с вариационными принципами, и заключается в получении некоторого функционала – интеграла от искомых функций. Таким функционалом является полная потенциальная энергия системы $Э$. Используя вариационный принцип Лагранжа (1), заменяем описанную выше краевую задачу вариационной задачей, в которой функционал энергии $Э$ определяется классическим соотношением

$$Э = U - A_1 - A_2, \qquad (2)$$

где U – потенциальная энергия деформации тела; A_1, A_2 – работа объемных и поверхностных сил на вызванных ими перемещениях. Или, с использованием выражений для составляющих функционал членов

$$Э = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, dV - \int_V \overline{F}_i u_i dV - \int_S \overline{T}_i u_i dS. \qquad (3)$$

Таким образом, решение задачи состоит в нахождении поля перемещений $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ в направлении осей координат x, y, z соответственно, доставляющих минимум функционалу полной потенциальной энергии системы $Э$.

Одним из способов реализации минимума функционала полной потенциальной энергии системы является вариационно-разностный метод. Сущность ВРМ, реализующего вариационный принцип Лагранжа (1) с помощью метода конечных разностей, заключается в сведении задачи минимизации функционала полной потенциальной энергии $Э$, являющейся квадратичной функцией относительно деформаций или перемещений, к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки. Сеточный аналог $E(u_s,v_p,w_k)$ функционала (3) реализуется заменой составляющих его интегралов конечными суммами, а производных – их конечно-разностными представлениями. Приближенное конечно-разностное выражение полной потенциальной энергии системы E получается в предположении, что в пределах каждой ячейки все функции и их производные остаются постоянными. Следует подчеркнуть достоинства вариационно-разностного метода, основанного на вариационном принципе Лагранжа: простота математической формулировки задачи; ясный физический смысл используемого функционала; автоматическое выполнение уравнений равновесия и статических граничных условий; возможность использования метода для расчета тел сложной формы, в том числе неоднородных по деформационно-прочностным характеристикам материалов; сводимость проблемы к решению системы линейных алгебраических уравнений, для реализации которой существует достаточно надежный математический аппарат линейной алгебры. Причем матрица системы имеет ленточную структуру, симметрична и положительно определена, что очень важно при численной реализации для практических приложений; возможность поэтапного контроля точности выкладок и промежуточных результатов.

Одной из самых первых работ, где был применен вариационный подход для получения сеточных уравнений при численном расчете изгиба прямоугольных армированных пластин поперечной нагрузкой, является работа Л.А. Оганесяна [3]. Аналогичный подход к решению задачи о деформировании пластин рассмотрен в [4, 5]. Применительно к решению осесимметричных и плоских задач теории упругости ВРМ был разработан Д.С. Гриффином и Р.Б. Келлогом [6]. В отличие от выше упомянутых работ, где реализация СЛАУ проводится итерационным методом и методом сопряженных градиентов, здесь используется метод Гаусса.

В общем случае функционал энергии является неквадратичным. Для анализа упругопластического поведения конструкций используются либо деформационная теория пластичности А.А. Ильюшина, которая хорошо описывает процесс упругопластического деформирования при монотонном нагружении и широко используется в расчетах упругопластических тел, или теория идеально-пластического тела (теория течения), устанавливающая связь между приращениями напряжений, деформаций и некоторыми параметрами пластического состояния. Ниже используется деформационная теория пластичности. Решение физически нелинейной задачи сводится к последовательности решений квадратичных задач с уточняемыми в каждом приближении параметрами нелинейности. С помощью этих параметров и осуществляется движение вдоль диаграммы нелинейной зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций $\sigma_i \sim e_i$, которая аппроксимировалась ломаной двухзвенной линией.

Изложенный алгоритм неоднократно был протестирован на многочисленных примерах решения упругих и упругопластических задач, а также сравнением с экспериментом. С помощью созданного варианта ВРМ был решен ряд статических и квазистатических упругопластических задач для существенно неоднородных тел вращения в дву- и трехмерной постановках.

Используя интегральную формулу преобразования объемного интеграла в поверхностный интеграл, запишем выражения для производной по объему от скалярной функции F в декартовых координатах x, y, z [7]:

$$\partial F / \partial x = \lim_{V \to 0} \oint\!\!\oint_S F n_x dS / V,$$

$$\partial F / \partial y = \lim_{V \to 0} \oint\!\!\oint_S F n_y dS / V,$$

$$\partial F / \partial z = \lim_{V \to 0} \oint\!\!\oint_S F n_z dS / V,$$

где n_x, n_y, n_z – косинусы углов между вектором нормали $\bar{\mathbf{n}}$ к замкнутой поверхности S, заключающей в себя объем V, и соответствующей осью координат:

$$n_x = \cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{i}}), \;\; n_y = \cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{j}}), \;\; n_z = \cos(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{k}}).$$

Таким образом, пространственные производные в трехмерном пространстве определяются через интеграл по замкнутой поверхности. При этом функция F должна быть непрерывной в объеме V и иметь там непрерывные ограниченные первые частные производные. Накладываются некоторые ограничения и на поверхность S.

Аналогичные формулы имеют место для двумерного осесимметричного случая (так называемые ноховские производные) [8]:

$$\partial F / \partial r = \lim_{A \to 0} \int_C F n_r dS / A,$$

$$\partial F / \partial z = \lim_{A \to 0} \int_C F n_z dS / A,$$

где C – граница области A; S – длина дуги; n_r, n_z – косинусы углов между вектором нормали $\bar{\mathbf{n}}$ к внешнему контуру C и осями цилиндрической системы координат r, φ, z.

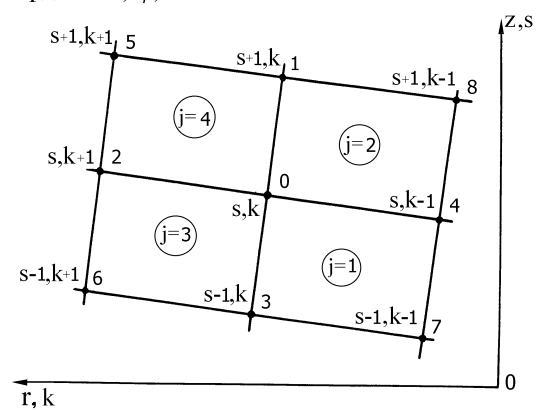


Рис. 1. Шаблон для случая дискретизации расчетной области с помощью четырехугольных ячеек

Дискретизация расчетной области в двумерной задаче проводится с помощью четырехугольных ячеек (рис. 1), а в пространственной трехмерной задаче – с помощью многогранников (шестигранников), ограниченных четырехугольными плоскостями (рис. 2). В частном случае это параллелепипеды (прямоугольные в том числе) и призмы с основаниями в виде трапеций и с параллелограммами и прямоугольниками в качестве граней.

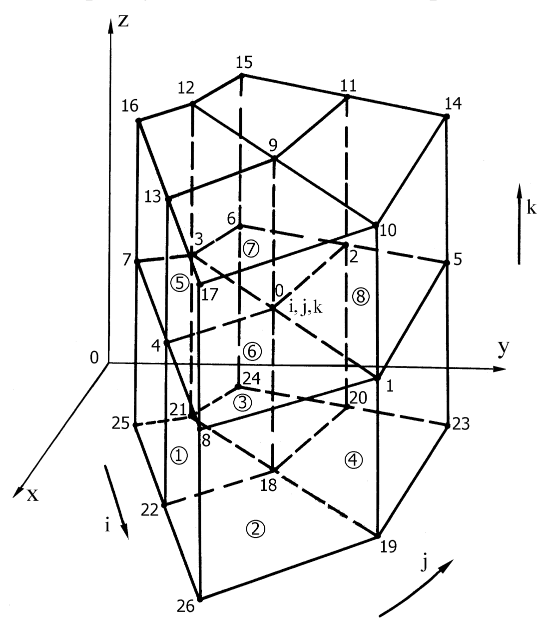


Рис. 2. Шаблон для случая дискретизации расчетной области с помощью многогранников

После дискретизации вариационной задачи и получения выражения сеточного аналога функционала энергии использование необходимого условия экстремума

$$\partial E(u_s, v_p, w_k) / \partial u_s = 0, \;\; \partial E(u_s, v_p, w_k) / \partial v_p = 0,$$

$$\partial E(u_s, v_p, w_k) / \partial w_k = 0,$$

$$(s = s_1, s_1 + 1, \ldots, S; \;\; p = p_1, p_1 + 1, \ldots, P;$$

$$k = k_1, k_1 + 1, \ldots, K),$$

сводит задачу минимизации функции многих переменных $E(u_s,v_p,w_k)$ к решению системы n линейных алгебраических уравнений относительного n искомых компонент вектора перемещений узлов конечно-разностной сетки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j = b_i, \;\; i = 1, 2, \;\ldots, n. \qquad (4)$$

Здесь коэффициенты a_{ij} – элементы матрицы $\{A\}$ СЛАУ; f_j – проекции u_s,v_p,w_k вектора перемещений на оси координат; b_i – свободные члены, включающие в себя статические и геометрические граничные условия. Следует отметить, что в задачах МДТТ матрица коэффициентов $\{A\}$ системы уравнений (4), к которой приводит алгоритм ВРМ, симметрична, положительно определена и имеет ленточную структуру [4].

При получении аналитического выражения условия стационарности функции энергии E для определения коэффициентов a_{ij} необходимо пользоваться шаблонами, представленными на рис. 1, 2. Структура выражения функции энергии такова, что от смещения в некотором узле сетки с номером 0 зависит лишь часть энергии E, а именно энергия ячеек, примыкающих к этому узлу. Количество таких ячеек колеблется от одной (угловой узел) до четырех и восьми ячеек (в середине массива) для двух- и трехмерной задачи соответственно.

3. Итерационные методы решения СЛАУ

Из итерационных методов были рассмотрены методы Зейделя (Гаусса-Зейделя) и верхней релаксации (МВР), которые получили наибольшее распространение при итерационном способе реализации СЛАУ, а также МВР с оптимальным коэффициентом релаксации (ОКР) ω_{opt}. Алгоритм метода Зейделя, сходимость которого доказана на основе общей теории разностных схем [9], в предположении, что диагональные элементы матрицы отличны от нуля ($a_{ii}\neq 0$), записывается в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} f_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} f_j^{(k)} = b_i,$$

где $f_j^{(k)}$ – j-я компонента вектора решения итерационного приближения с номером k.

Величина перемещения f_j на (k+1)-ой итерации определяется из уравнения

$$a_{ii} f_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} f_j^{(k)} + b_i.$$

Из последнего соотношения видно, что метод Зейделя относится к так называемым неявным двухслойным итерационным методам.

Для ускорения сходимости метода Зейделя его модифицируют введением в итерационную схему коэффициента релаксации ω и приходят к так называемому методу верхней релаксации. Этот метод был предложен Франкелом [10] и Янгом [11] и обобщен другими авторами. Основные результаты изложены в работе Варги [12]. В этом случае итерационный процесс осуществляется по следующим формулам:

$$a_{ii} f_i^{(k+1)} = (1-\omega) a_{ij} f_i^{(k)} - \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j^{(k+1)} - \\ - \omega \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} f_j^{(k)} + \omega b_i. \quad (5)$$

При этом реализация одного итерационного шага осуществляется примерно тем же количеством действий, что и в методе Зейделя. Этот модифицированный метод при $\omega > 1$ носит название метода верхней релаксации, при $\omega = 1$ – полной релаксации (метод Зейделя) и при $\omega < 1$ – нижней релаксации. Доказано, что для $0 < \omega < 2$ метод всегда сходится и расходится при $\omega < 0$ или $\omega > 2$ (при $\omega = 0$ или $\omega = 2$ не сходится и не расходится) [12]. При этом матрица коэффициентов $\{A\}$ должна быть симметричной, неособенной, положительно определенной, а все диагональные коэффициенты СЛАУ $a_{ii} > 0$. Оптимальное значение ω_{opt} коэффициента ω, обеспечивающее наиболее быструю сходимость итерационного процесса, лежит в пределах $0 < \omega < 2$.

Рассмотрим вопрос об определении ОКР в методе верхней релаксации, когда $1 < \omega < 2$. В работе [13] приведена следующая формула для определения ω_{opt}:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}}, \quad (6)$$

где $\rho^2 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\left\| f^{(k+1)} - f^{(k)} \right\|}{\left\| f^{(k)} - f^{(k-1)} \right\|}$, $\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{J} f_i^{\,2}}$, k–1, k, k+1 – номера итераций, выполняемых при $\omega = 1$.

На практике для вычисления ρ^2 и ω_{opt} делается достаточно большое число итераций при значении $\omega = 1$, а затем решение продолжается при $\omega = \omega_{opt}$, определенным из (6).

А.П. Деругой и А.А. Ларионовым [14] для ускорения сходимости итерационного процесса (5) предложена модификация способа (6) определения ω_{opt} в виде следующей зависимости от числа итераций k:

$$\omega_{opt}(k) = a + be^{-ck}. \quad (7)$$

Чтобы определить коэффициенты a, b, c, для заданных величин $k = l - \Delta,\ l,\ l + \Delta$ вычисляются по формуле (6) значения ω_{opt} и приравниваются выражению (7):

$$\omega_{opt}(l-\Delta) = a + be^{-c(l-\Delta)},\ \omega_{opt}(l) = a + be^{-cl},$$
$$\omega_{opt}(l+\Delta) = a + be^{-c(l+\Delta)}.$$

Из решения полученной системы уравнений получаем

$$a = \omega_{opt}(l) + \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2},$$

где $p_1 = \omega_{opt}(l) - \omega_{opt}(l-\Delta)$, $p_2 = \omega_{opt}(l+\Delta) - \omega_{opt}(l)$.

Для $k = \infty$ формула (7) для ОКР запишется в следующем виде:

$$\omega_{opt}(\infty) = \omega_{opt}(l) + \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} + be^{-c\infty}.$$

Окончательно, ввиду того, что $be^{-c\infty} = 0$, имеем

$$\omega_{opt}(\infty) = \omega_{opt}(l) + \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}. \quad (8)$$

Таким образом, вычислив ОКР по формуле (8), итерационный процесс (5) продолжаем со значением $\omega_{opt}(\infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. — М.: Высшая школа, 1975. — 528 с.
2. Заруцкий В.А. Равновесие ребристых цилиндрических оболочек // Прикладная механика. — 1965. — Том 1, вып. 11. — С. 28—35.
3. Оганесян Л.А. Численный расчет плит // Решение инженерных задач на электронно-вычислительных машинах: Матер. к конф. по механизации и автоматизации инж. и управл. работ. — Ленинград, июнь 1963 г. — Л., 1963. — С. 84—97.
4. Кармишин А.В., Мяченков В.И., Репин А.А. Вариационный метод получения конечно-разностных уравнений ортотропных пластин // Некоторые вопросы прочности конструкций: Сб. статей. — Б. м., 1967. — Вып. 3. — С. 63—67.
5. Вайнберг Д.В., Синявский А.Л. Дискретный анализ в теории пластин и оболочек // Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок, 1966 г. — М., 1966. — С. 209—214.
6. Гриффин Д.С., Келлог Р.Б. Численное решение осесимметричных и плоских задач упругости // Механика: Сб. переводов. — М., 1968. — № 2 (108). — С. 111—125.
7. Барашков В.Н., Люкшин Б.А. Алгоритм реализации трехмерной задачи теории упругости и пластичности // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теор. и прикл. мех. — Новосибирск, 1993. — Т. 7 (24), № 4. — С. 10—25.
8. Нох В.Ф. СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач // Вычислительные методы в гидродинамике. — М., 1967. — С. 128—184.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
10. Frankel S.P. Convergence rate of iterative treatments of partial differential equations // Math. Tables Aids Comput. — 1950. — Vol. 4. — P. 65—75.
11. Young D.M. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 76. — P. 92—111.
12. Varga R.S. Matrix iterative analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs. — New Jersy: S. n., 1962.
13. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1969. — 368 с.
14. Деруга А.П., Ларионов А.А. Об одном способе определения оптимального коэффициента сверхрелаксации // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. статей. — Красноярск, 1978. — Вып. 11. — С. 175—178.

УДК 529.58